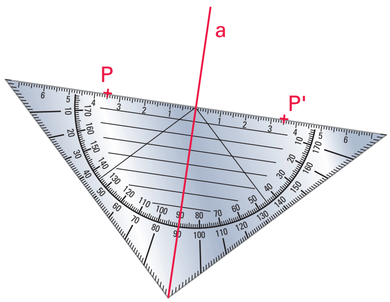
Grundwissen

- Kopiere die folgenden Seiten auf dünnen Karton und zerschneide diesen in „Lernkarten“.
- Baue damit eine Lernkartei auf: Wenn im Unterricht ein neuer Lehrstoff behandelt wurde, nimmst du die zugehörigen Karten in deine Kartei auf.
- Schreibe das Thema der Karte noch einmal auf die Rückseite. Dann kannst du dich besser selbst abfragen, ohne gleich die Lösung vor dir zu sehen.
- Ist dir eine Testaufgabe beim Intensivieren sehr schwer gefallen, so halte diese auch auf einer Lernkarte fest.
- Trainiere etwa jede Woche einmal den Lehrstoff: Mische dazu die Karten und versuche den Inhalt möglichst selbständig mündlich wiederzugeben. Die Karten, bei denen das gut gelingt, legst du auf die Seite. Fahre so fort, bis du alle Karten auf die Seite gelegt hast.
- Dieses Verfahren garantiert gute Lernfortschritte in der Mathematik. In diesem Jahr lernst du wichtige Grundlagen, die auch in Zukunft immer wieder in Prüfungen von dir verlangt werden. Damit sind sie mindestens genauso wichtig wie der aktuell behandelte Stoff.

Achsenspiegelung

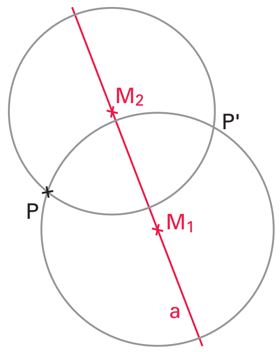
Die Verbindungsstrecke von einem Punkt P und seinem Bildpunkt P' wird von der Symmetrieachse a senkrecht halbiert.



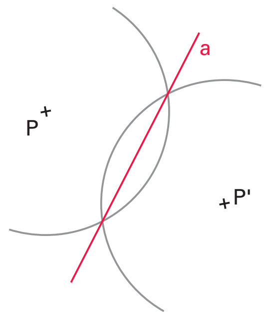
Wichtige Eigenschaft
Die Punkte der Symmetrieachse – und nur diese – sind von zwei zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.

Konstruktionen bei der Achsenspiegelung

- zu einem Punkt P den Bildpunkt P'

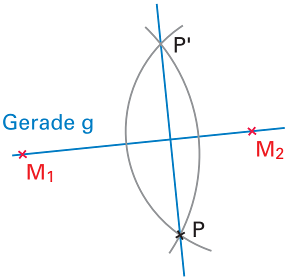


- zu einem Punkt und seinem Bildpunkt die Achse

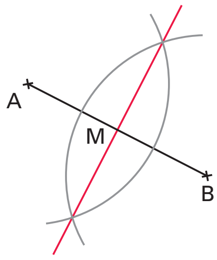


Grundkonstruktionen

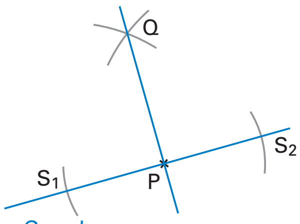
- „Lot fällen“ von P auf g



- „Strecke halbieren“ „Mittelsenkrechte errichten“

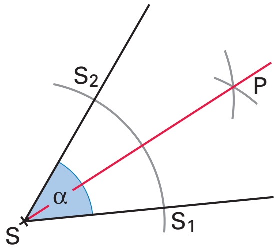


- „Lot in P errichten“



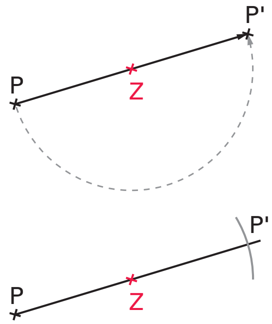
Grundkonstruktion

„Winkel halbieren“

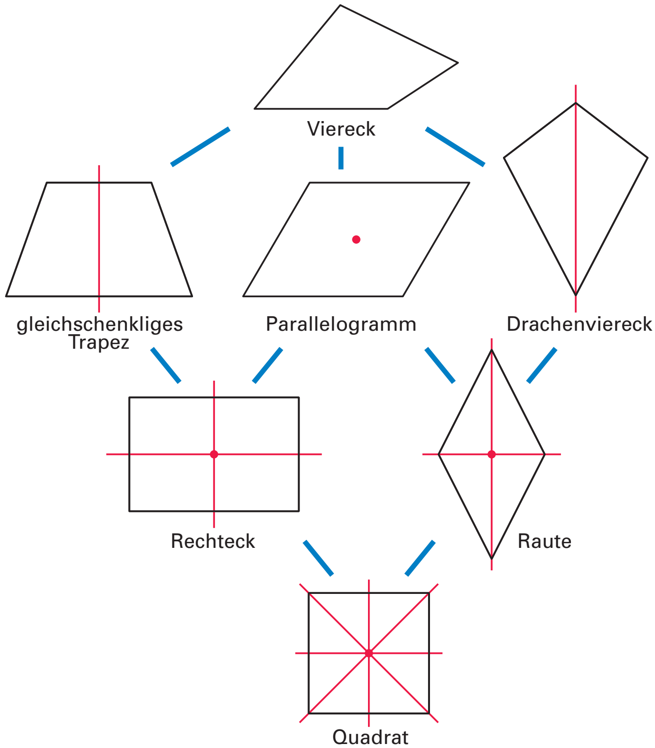


Punktspiegelung am Zentrum Z

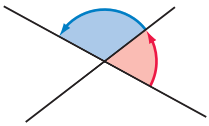
Konstruktion des Bildpunktes P' zu P



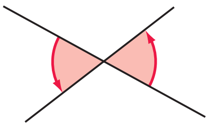
Vierecke



Winkel an einer Geradenkreuzung

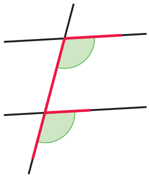


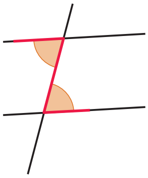
Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.



Scheitelwinkel sind gleich groß.

Winkel an einer Doppelkreuzung





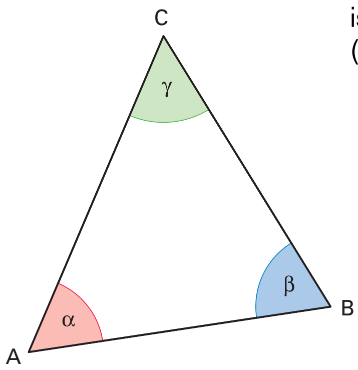
An parallelen Geraden gilt:

Stufenwinkel (F-Winkel) sind gleich groß.

Wechselwinkel (Z-Winkel) sind gleich groß.

Winkelsummen

In einen Dreieck ist die Winkelsumme 180°.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



In einem Vieleck mit n Ecken ist die Winkelsumme $(n-2) \cdot 180°$.

Äquivalente Terme

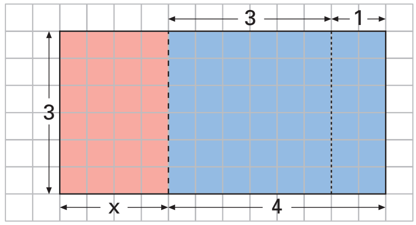
Der gleiche Flächeninhalt kann durch verschieden aussehende Terme beschrieben werden.

Bei jedem Einsetzen von Zahlen für die Variablen erhalten wir bei jedem der drei Terme den gleichen Wert.

$$T_1(x) = 3(x+4)$$

$$T_2(x) = 3x+12$$

$$T_3(x) = 3+3x+9$$



Mithilfe der Rechengesetze können wir Terme in äquivalente Terme umformen.

Terme umformen

Gleichartige Terme unterscheiden sich nur im Koeffizienten (in der Vorzahl) der Variablen:

$2ab^2$, $-5ab^2$, $\frac{3}{2}b^2a$ sind gleichartige Terme; nicht gleichartig dazu sind $2ab$, $-5a^2b$, b^2.

Addieren und Subtrahieren
Nur gleichartige Terme kannst du zusammenfassen:

$$\underline{7ab^2}\,\underline{\underline{+7b^2}}\,\underline{-6ab^2}\,\underline{\underline{-8b^2}} = ab^2 - b^2$$

Multiplizieren
Faktoren darfst du vertauschen und klammern:

$$2x \cdot 3x^2 = (2 \cdot 3) \cdot (x \cdot x^2) = 6x^3$$

$$(-2a) \cdot (-3a^3) \cdot 4b = +2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a \cdot a^3 \cdot b$$
$$= 24a^4b$$

Klammerregeln

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Ausmultiplizieren

$a \cdot (2a - 3a^2 + 4b) = 2a^2 - 3a^3 + 4ab$

$(-2x) \cdot (-x + 3x^2 - 1) = 2x^2 - 6x^3 + 2x$

$-(2a - 3a^2) = (-1) \cdot (2a - 3a^2) = -2a + 3a^2$

Ausklammern

$12a^2 - 18b = 6 \cdot (2a^2 - 3b)$

$a^2 - a = a \cdot (a - 1)$

$-2ab^2 - 2a^2b = -2ab \cdot (b + a)$

Lösen von Gleichungen

Äquivalenzumformung		**Lösungsstrategie**
Ausmultiplizieren und gleichartige Terme zusammenfassen	$2x + 5(x+1) = 4(x-2) + 1$ $2x + 5x + 5 = 4x - 8 + 1$	**Aufräumen:** Beide Seiten getrennt vereinfachen
Addieren oder Subtrahieren des gleichen Terms	$7x + 5 = 4x - 7 \quad \vert -4x$	**Trennen:** x-Terme auf eine Seite bringen
Addieren oder Subtrahieren der gleichen Zahl	$3x + 5 = -7 \quad \vert -5$	**Trennen:** Zahlen auf die andere Seite bringen
Multiplizieren oder Dividieren mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl	$3x = -12 \quad \vert :3$	x **isolieren**
	$x = -4$	**Lösung**
	$L = \{-4\}$	**Lösungsmenge** angeben, falls verlangt
Probe: Lösung getrennt in die linke und dann in die rechte Seite der ersten Zeile einsetzen		

Strategien zum Lösen von Problemen

Durch Probieren

- Bezeichne die im Text vorkommenden Größen mit Variablen.
- Lege eine Tabelle an und übersetze den Text in Terme.
- Setze systematisch Zahlen für die Variablen ein und beobachte, wie sich die Werte ändern.
- Entwickle daraus die Lösung.

Mit Hilfe einer Gleichung

- Bezeichne eine unbekannte Größe mit x.
- Lege eine Tabelle an und drücke alle Größen durch x aus.
- Stelle mit dem Text eine Gleichung zwischen den Termen der Tabelle auf.
- Löse die Gleichung.
- Berechne alle gesuchten Größen und überprüfe, ob diese die Forderungen des Textes erfüllen.

Rechenregeln für Potenzen

(1) Ist die Basis gleich, so ist das Produkt einer Potenz aus m Faktoren mit einer Potenz aus n Faktoren gleich einer Potenz aus $m + n$ Faktoren.

$a^2 \cdot a^3 = a^5$; $(-x)^3 \cdot (-x)^4 = (-x)^7 = -x^7$

(2) Ein Produkt wird potenziert, indem wir den Exponenten jedem Faktor zuteilen.

$(2a)^3 = 2^3 \cdot a^3 = 8a^3$; $(-2x)^2 \cdot (-3x)^3 = 4x^2 \cdot (-27x^3) = -108x^5$

(3) Potenzieren wir eine Potenz aus m Faktoren mit n, so erhalten wir eine Potenz aus $m \cdot n$ Faktoren.

$(a^2)^3 = a^6$; $(-2a^3)^5 = -32a^{15}$

Produkte von Summen

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Jedes Glied der ersten Klammer wird mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert und diese Produkte werden addiert.

$(2x-3)\cdot(4y+5) = 8xy + 10x - 12y - 15$

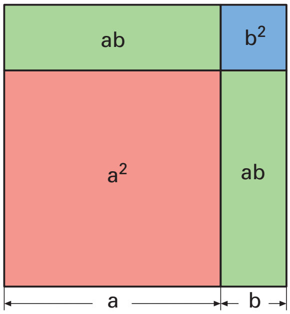
$(-a+1)\cdot(2a^2-1) = -2a^3 + a + 2a^2 - 1$

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

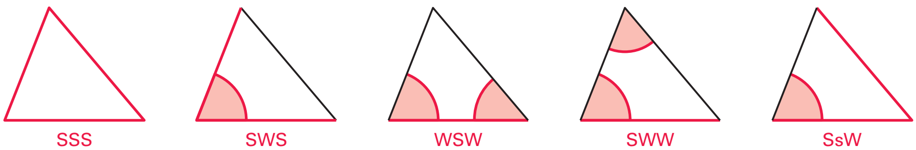
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



Kongruenzsätze

Dreiecke sind schon kongruent, wenn sie
1. in drei Seiten übereinstimmen (SSS),
2. in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen (SWS),
3. in einer Seite und zwei anliegenden Winkeln übereinstimmen (WSW),
4. in einer Seite, einem anliegenden Winkel und dem Gegenwinkel übereinstimmen (SWW),
5. in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen (SsW).

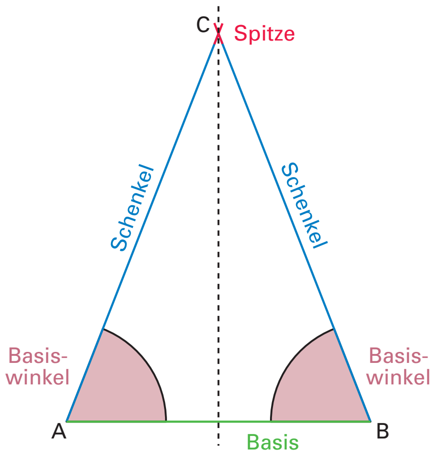


Dreiecks- und Viereckskonstruktionen

Strategie:
1. Zeichne eine Planfigur und hebe die gegebenen Seiten und Winkel farbig hervor.
2. Entwickle den Konstruktionsplan:
   Beginne mit einer Größe. Wenn du nicht weiterkommst, beginne mit einer anderen Größe. Benutze eventuell ein Schmierpapier.
   Verwende die Formulierungen
   - **Durch Vorgabe von ... sind ... und ... bekannt.**
   - **Punkt ... liegt: 1. auf ... 2. auf ...**
     Benutze dabei: **auf dem Kreis um ... mit Radius ...**
     auf dem freien Schenkel des Winkels ..., angetragen in ... an ...
     auf der Parallelen zu ... durch ... (im Abstand ...)
3. Zeichne den Bauplatz mit den gegebenen Stücken und konstruiere nur mit Zirkel und Lineal das gesuchte Dreieck bzw. Viereck.

Gleichschenkliges Dreieck

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt gleichschenklig.



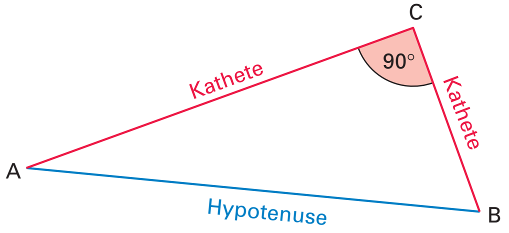
Ein gleichschenkliges Dreieck ist achsensymmetrisch.

Basiswinkelsatz
In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die beiden Basiswinkel gleich groß.

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt gleichseitig.
Im gleichseitigen Dreieck misst jeder Winkel 60°.

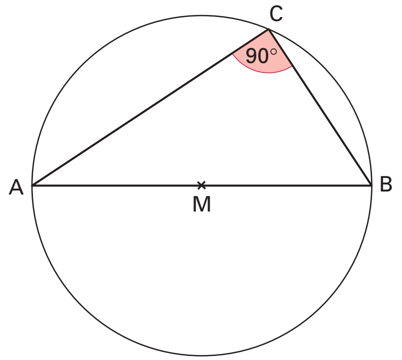
Rechtwinkliges Dreieck

Ein Dreieck mit einem 90°-Winkel heißt rechtwinklig:

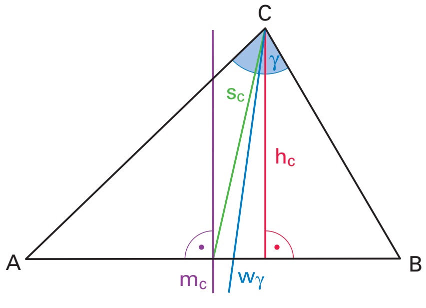


Satz des Thales

Liegen die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.



Besondere Linien eines Dreiecks



Die **Höhen** eines Dreiecks sind die von den Ecken auf die gegenüberliegende Seite gefällten Lotstrecken. Sie schneiden sich in einem Punkt.

Die **Seitenhalbierenden** eines Dreiecks sind die Verbindungsstrecken der Seitenmitten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S. S ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

Die Punkte, die von zwei Punkten gleich weit entfernt sind, liegen auf der **Mittelsenkrechten** der Verbindungsstrecke. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M. M ist der Mittelpunkt des **Umkreises**.

Die Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand haben, liegen auf der **Winkelhalbierenden**. Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt W. W ist der Mittelpunkt des **Inkreises**.

Die Zinsformel

Ein Kapital K bringt bei einem Zinssatz von p% in t Tagen Zinsen in der Höhe von

$$Z = p\% \cdot K \cdot \frac{t}{360}.$$

Bei einem Zinssatz von 4% bringt ein Kapital von 500 € in einem Jahr Zinsen von

$$4\% \text{ von } 500\,€ = 0{,}04 \cdot 500\,€ = 20\,€.$$

In 72 Tagen bringt das Kapital Zinsen von

$$Z = 20\,€ \cdot \tfrac{72}{360} = 20\,€ \cdot \tfrac{1}{5} = 4\,€.$$

Das arithmetische Mittel

Die Zahl $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$ heißt arithmetisches Mittel der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Arithmetisches Mittel der Zahlen 7, 15, 20

$$\overline{x} = \frac{7 + 15 + 20}{3} = \frac{42}{3} = 14$$

Das arithmetische Mittel schafft einen Ausgleich zwischen großen und kleinen Werten. Die Abweichungen vom Mittelwert ergeben zusammen Null.