

Multiplikation und Division in \mathbb{Q}

Rechenregeln

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Vorzeichenregeln

$$+ \cdot + = +$$

$$+ : + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$- : - = +$$

$$- \cdot + = -$$

$$- : + = -$$

$$+ \cdot - = -$$

$$+ : - = -$$

Potenzgesetze

1. Potenzgesetz

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Beispiel: $3^3 \cdot 3^4 = 3^{3+4} = 3^7$

$$3^3 \cdot 3^{-4} = 3^{3-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Ü: a) $5^5 \cdot 5^7 =$

b) $0,5 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^5 =$

c) $(-2)^3 \cdot (-2)^{-3} =$

2. Potenzgesetz

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiel: $(3^3)^4 = 3^{3 \cdot 4} = 3^{12}$

Ü: a) $(3,5^5)^5 =$

b) $[(k^4)^2]^2 =$

c) $\left[\left(-1 \frac{1}{3} \right)^2 \right]^{-7} =$

3. Potenzgesetz

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Beispiel: $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$

Ü: a) $5^2 \cdot 3^2 =$

b) $x^{-3} \cdot y^{-3} \cdot z^{-3} =$

c) $(-2,5)^7 \cdot (-2)^7 =$

4. Potenzgesetz

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Beispiel: $\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

$$\frac{3^3}{3^4} = 3^{3-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Ü: a) $7^4 : 7^7 =$

b) $(-2,2)^{-3} : (-2,2)^3 =$

c) $\frac{2^{-2}}{2^{-5}} =$

5. Potenzgesetz

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n$$

Beispiel: $\frac{2^4}{6^4} = \left(\frac{2}{6} \right)^4 = \left(\frac{1}{3} \right)^4$

Ü: a) $2^{-2} : 14^{-2} =$

b) $(-8)^5 : 4^5 =$

c) $\frac{3^{-1}}{9^{-1}} =$

Lösen von (Un)gleichungen durch Äquivalenzumformungen

1 Gleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch sie dividiert.

Beispiele: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad & -2 \cdot x + 6 = 3 \quad | -6 \\
 \Leftrightarrow & -2 \cdot x = -3 \quad | :(-2) \\
 \Leftrightarrow & x = 1,5 \\
 & \mathbb{L} = \{1,5\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \frac{1}{4} \cdot x - 5 = -7 \quad | +5 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{4} \cdot x = -2 \quad | \cdot 4 \\
 \Leftrightarrow & x = -8 \\
 & \mathbb{L} = \{-8\}
 \end{aligned}$$

2 Ungleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl multipliziert oder durch sie dividiert,
- beide Seiten mit der gleichen **negativen Zahl** multipliziert oder durch sie dividiert **und** das Ungleichheitszeichen umkehrt (**Inversionsgesetz**).

Beispiele: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad & -2 \cdot x < 14 \quad | :(-2) \\
 \Leftrightarrow & x > -7 \quad \text{Inversion!} \\
 & \mathbb{L} = \{x \mid x > -7\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 6 \cdot x > -27 \quad | :6 \\
 \Leftrightarrow & x > -4,5 \\
 & \mathbb{L} = \{x \mid x > -4,5\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & -\frac{1}{4} \cdot x + 5 \geq -3 \quad | -5 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{4} \cdot x \geq -8 \quad | \cdot (-4) \\
 \Leftrightarrow & x \leq 32 \quad \text{Inversion!} \\
 & \mathbb{L} = \{x \mid x \leq 32\}
 \end{aligned}$$

Ü: Löse durch Äquivalenzumformungen die folgenden Gleichungen und Ungleichungen mit $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$:

a) $-5x + 36 = 28$

b) $-x - 67 \leq 34$

c) $2x + 13 \leq -18$

d) $-12x - 41 > -23$

e) $(177 - 202) \cdot x + 296 = 411$

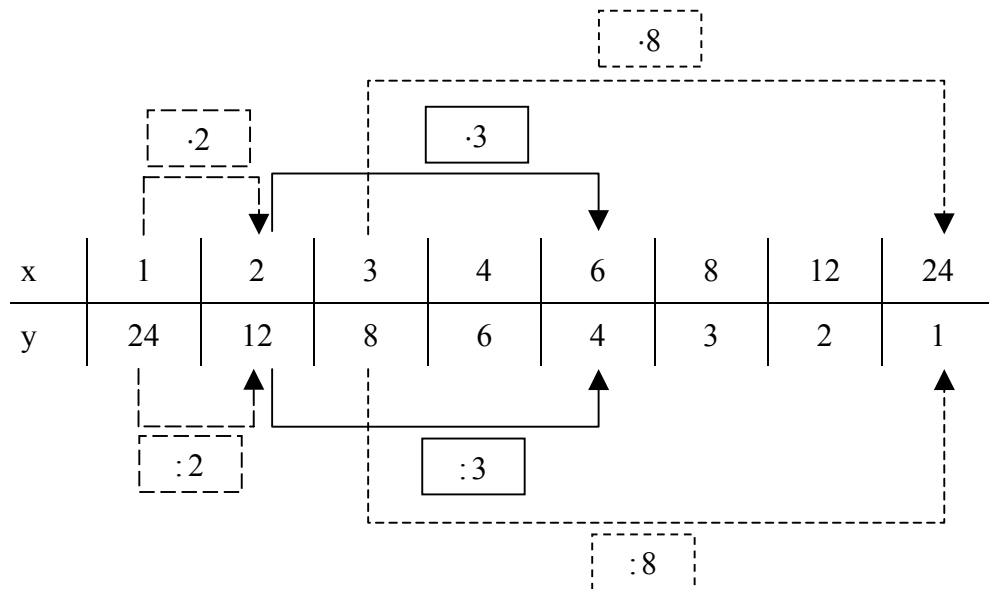
f) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x < -\frac{1}{6}$

g) $2^3 - x \geq 3^2 \cdot 2$

Indirekte Proportionalität

Entspricht bei einer Zuordnung von Größen das **n-fache** der einen Größe dem **n-ten Teil** der anderen Größe, so heißt diese Zuordnung indirekte Proportionalität.

Beispiel: Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 24 cm^2 . Wenn $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ist dies für acht Rechtecke verschiedener Länge $x \text{ cm}$ und Breite $y \text{ cm}$ möglich.



Eigenschaften:

- Alle Zahlenpaare $(x|y)$ einer indirekten Proportionalität sind **produktgleich**. Das Produkt $x \cdot y$ hat immer den **gleichen Wert**.

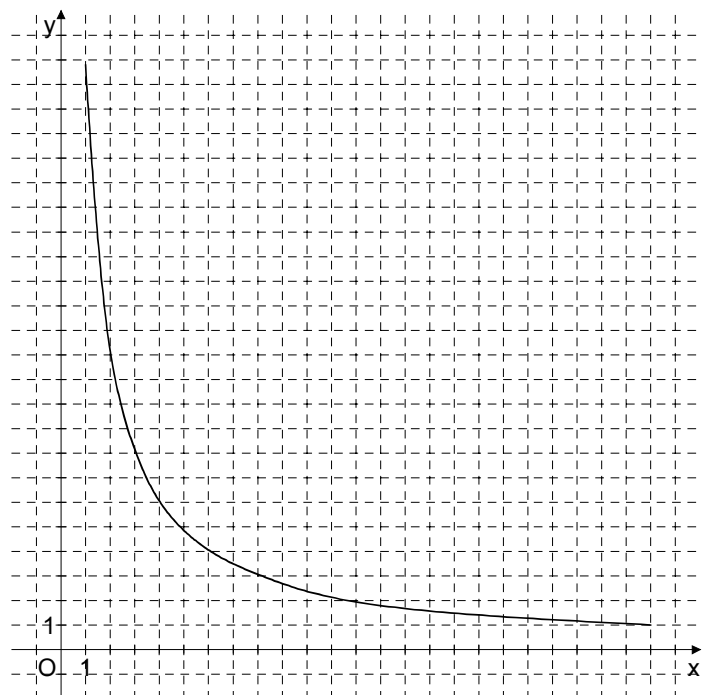
Beispiel: $x \cdot y = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2 = 24 \cdot 1$

Sprechweise: „ x und y sind zueinander indirekt proportional“

Schreibweise: $y \sim \frac{1}{x}$

- Der Graph einer indirekten Proportionalität ist ein **Hyperbelast**. ($G = \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$)

Beispiel:



Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Unter Zinsen (kurz: **Zins**) versteht man den Geldbetrag, den man nach einer bestimmten Zeit für geliehenes Geld bezahlen muss oder für verliehenes Geld bekommt.

Es entsprechen sich:

Prozentwert (PW)



Jahreszins (Z_J)

Prozentsatz (p)



Zinssatz (p)

Grundwert (GW)



Kapital (K)

Die so berechneten Zinsen Z_J beziehen sich auf ein Jahr (Jahreszins). Wird ein anderer Zeitraum betrachtet, so muss der Jahreszins auf diesen Zeitraum umgerechnet werden. Ein Geschäftsjahr hat 365 Tage.

Zins für 1 Jahr (Jahreszins)

$$Z_J = \frac{K \cdot p}{100}$$

Zins für 1 Tag

$$Z_t = \frac{K \cdot p}{100 \cdot 365}$$

Zins für n Jahre

$$Z_n = \frac{K \cdot p \cdot n}{100}$$

Zins für T Tage

$$Z_T = \frac{K \cdot p \cdot T}{100 \cdot 365}$$

Beispiel: Berechne die Zinsen für 292 Zinstage, wenn ein Kapital 15000,00 € zu 8% verliehen wird.

$$Z_T = \frac{15000 \text{ €} \cdot 8 \cdot 292}{100 \cdot 365} \quad Z_T = 960 \text{ €} \quad \text{Der Zins für 292 Tage beträgt 960,00 €.}$$

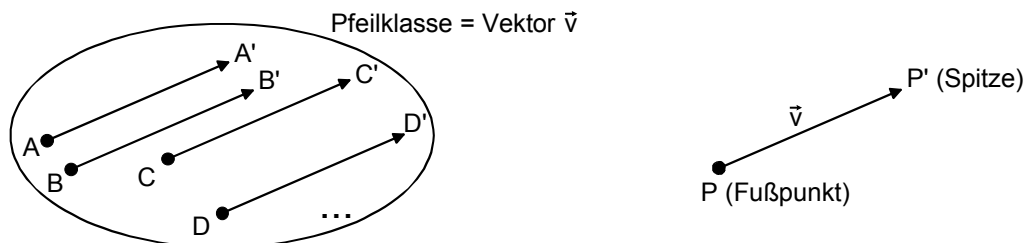
Übungen:

- 1.0 Auf einem Sparbuch, das mit 3,75% verzinst wird, sind 940,00 €.
- 1.1 Berechne die Zinsen nach einem Jahr.
- 1.2 Berechne den Zinsertrag für das zweite Jahr, wenn die Zinsen des ersten Jahres dem Kapital zugerechnet werden.
- 2 Herr Maurer gibt 10000,00 € zu 6,5% auf die Bank und legt alljährlich die gewonnenen Zinsen wieder zu seinem Kapital. Damit erhöht sich sein Kapital Jahr für Jahr um den Zinsertrag. Berechne sein Endkapital nach 5 Jahren.

Die Parallelverschiebung

Eigenschaften: $P \xrightarrow{\vec{v}} P'$

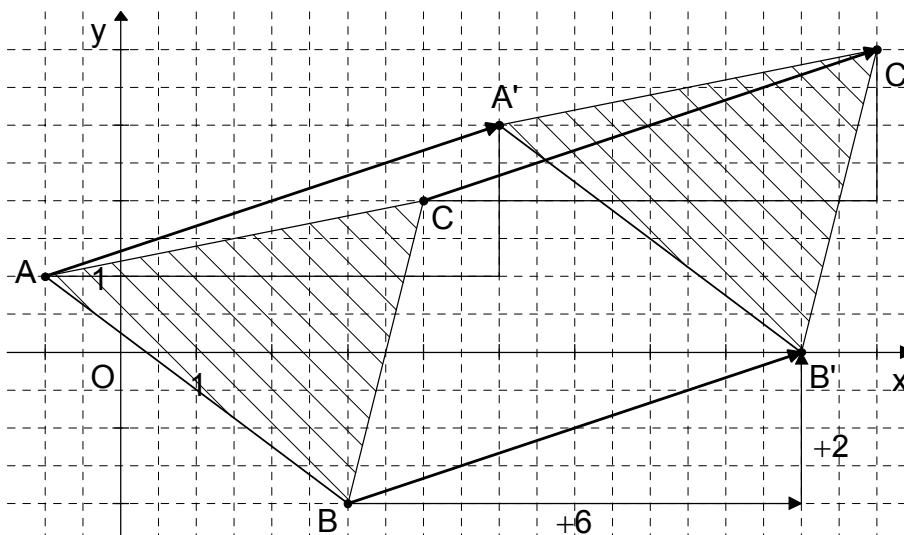
- Bei allen Parallelverschiebungen sind die Verbindungsstrecken von Ursprung P und Bildpunkt P' **parallel, gleich lang und gleich gerichtet**.
- Sie bilden eine Pfeilkategorie. Jede Pfeilkategorie heißt **Vektor**. Durch jede Parallelverschiebung ist umkehrbar eindeutig ein Vektor bestimmt.
- Alle Parallelverschiebungen haben **keinen** Fixpunkt.
- Alle Parallelverschiebungen sind **längen-** und **winkeltreu** („Kongruenzabbildung“).
- Alle Parallelverschiebungen sind **geraden-** und **kreistreu**.



Jeder Vektor \vec{v} lässt sich im Koordinatensystem durch seine Koordinaten eindeutig festlegen. Die Koordinaten des Pfeils $\overrightarrow{PP'}$ und damit des Vektors \vec{v} werden durch die Koordinaten des **Fußpunktes** $P(x|y)$ und die Koordinaten der **Spitze** $P'(x'|y')$ festgelegt. Man berechnet sie nach der Regel:

$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$ <p>„Spitze minus Fuß“</p>	z. B. $P(-2 1)$ und $P'(4 3)$	$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 3 - 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$
---	-------------------------------	--	---

Beispiel: $\Delta ABC \xrightarrow{\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}} \Delta A'B'C'$ mit $A(-1|1)$, $B(3|-2)$ und $C(4|2)$



Gesetze zur Vektorrechnung

1 Kommutativgesetz und Assoziativgesetz bei der Addition von Vektoren

Kommutativgesetz $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$ Assoziativgesetz $(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$

2 Berechnung von Summenvektoren

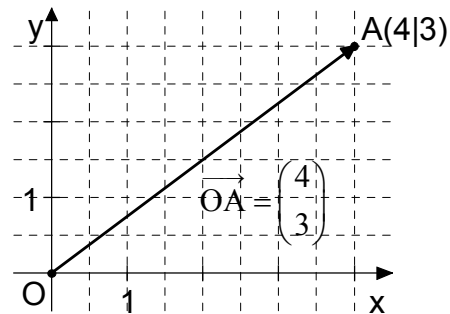
Allgemein $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad \vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad \vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$

Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} 3+(-4) \\ 2+1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3 Ortspfeil

Ortspfeile sind Pfeile, die vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem Punkt im Koordinatensystem führen. Die Koordinaten des Ortspfeils sind dieselben wie die Koordinaten des Punktes.

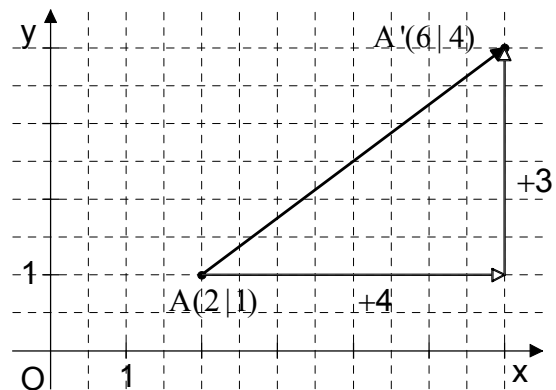
z. B.: $A(4|3) \quad \vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



4 Berechnung der Koordinaten von Bildpunkten

Allg.: $\vec{OA'} = \vec{OA} \oplus \vec{v} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + v_x \\ y + v_y \end{pmatrix} \quad A'(x + v_x | y + v_y)$

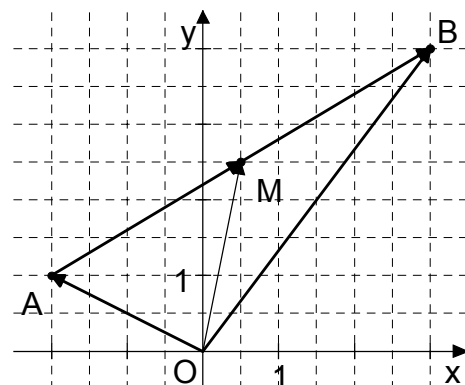
z. B.: $A(2|1) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
 $\vec{OA'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{OA'} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 1+3 \end{pmatrix}$
 $\vec{OA'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A'(6|4)$



5 Berechnung der Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke [AB]

Allg.: $A(x_A | y_A), B(x_B | y_B), M(x_M | y_M)$
 $M(x_M | y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

z. B.: $A(-2|1), B(3|4)$
 $M\left(\frac{-2+3}{2} \mid \frac{1+4}{2}\right) = M(0,5 | 2,5)$



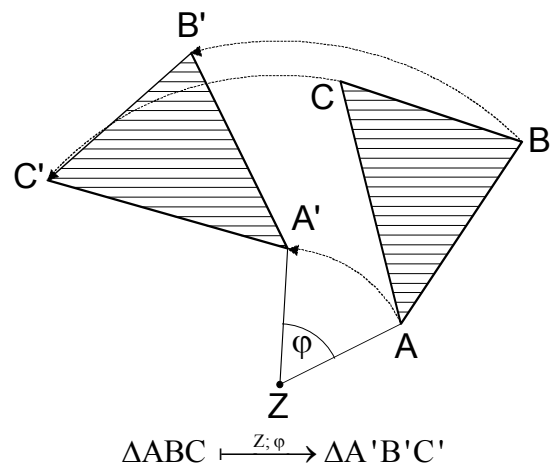
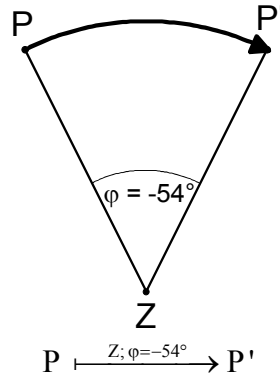
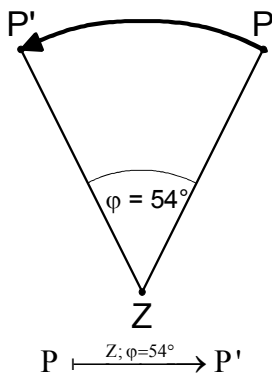
Die Drehung

Eigenschaften: $P \xrightarrow{Z; \varphi} P'$

- Jede Drehung besitzt einen Punkt Z als Drehzentrum und einen Winkel φ als Drehwinkel.
- Die Verbindungsstrecken $[PZ]$ von Ursprung P und Drehzentrum Z und $[P'Z]$ vom zugehörigen Bildpunkt P' und Drehzentrum Z sind gleich lang und schließen den Winkel PZP' mit dem Maß φ ein.
- Alle Drehungen haben nur das **Zentrum Z als Fixpunkt**.
- Alle Drehungen sind **längen- und winkeltreu** („Kongruenzabbildung“).
- Alle Drehungen sind **geraden- und kreistreu**.

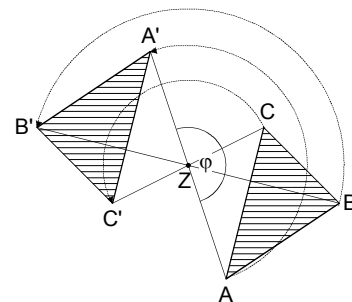
positive Drehrichtung

negative Drehrichtung

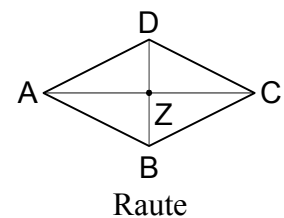
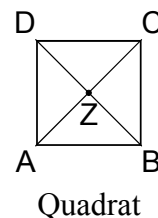
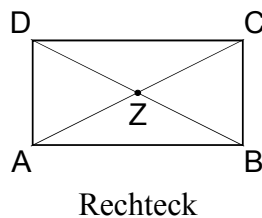
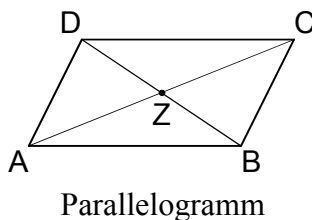


Eine **Drehung um 180°** nennt man auch eine **Punktspiegelung** am Zentrum Z .

$$\triangle ABC \xrightarrow{Z; \varphi=180^\circ} \triangle A'B'C'$$

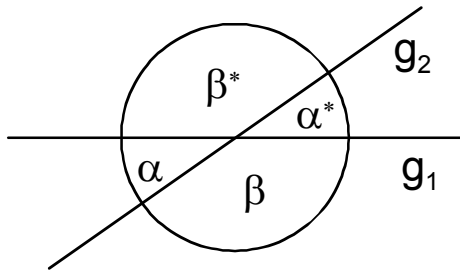


Merke: Eine Figur heißt **punktsymmetrisch**, wenn sie durch Drehung an einem Punkt Z um 180° auf sich selbst abgebildet werden kann.



Regeln für Winkel

1 Neben- und Scheitelwinkel

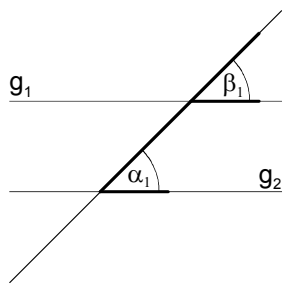


Scheitelwinkel sind gleich groß:
 $\alpha = \alpha^*$ und $\beta = \beta^*$

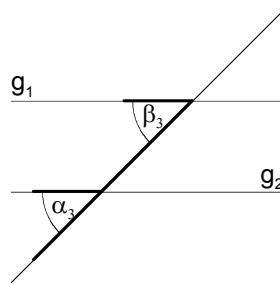
Nebenwinkel ergänzen sich zu 180° :
 $\alpha + \beta = 180^\circ$

2 Winkel an Parallelen ($g_1 \parallel g_2$)

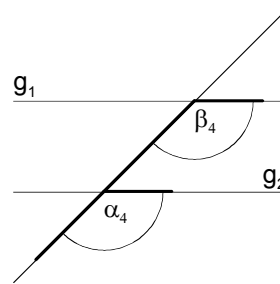
2.1 Stufenwinkel (F-Winkel)



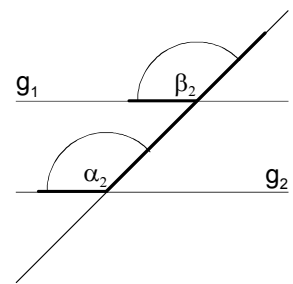
$$\alpha_1 = \beta_1$$



$$\alpha_3 = \beta_3$$

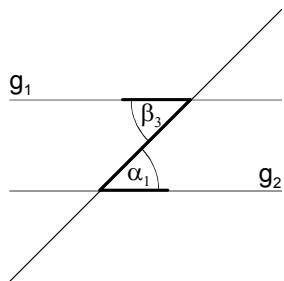


$$\alpha_4 = \beta_4$$

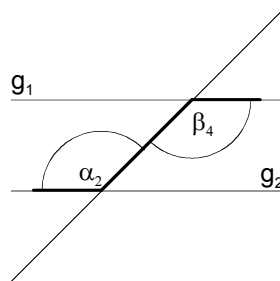


$$\alpha_2 = \beta_2$$

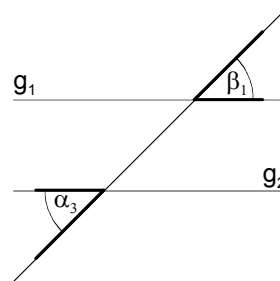
2.2 Wechselwinkel (Z-Winkel)



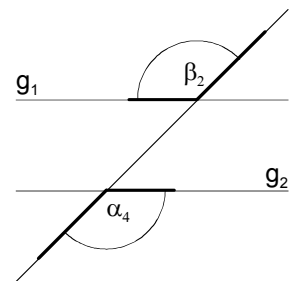
$$\alpha_1 = \beta_3$$



$$\alpha_2 = \beta_4$$



$$\alpha_3 = \beta_1$$



$$\alpha_4 = \beta_2$$

3 Innenwinkelsummen

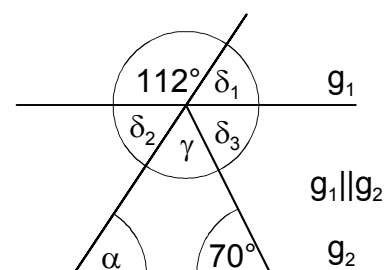
3.1 im Dreieck

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkelmaße der drei Innenwinkel 180° :
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

3.2 im Viereck

In jedem Viereck beträgt die Summe der Winkelmaße der vier Innenwinkel 360° :
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

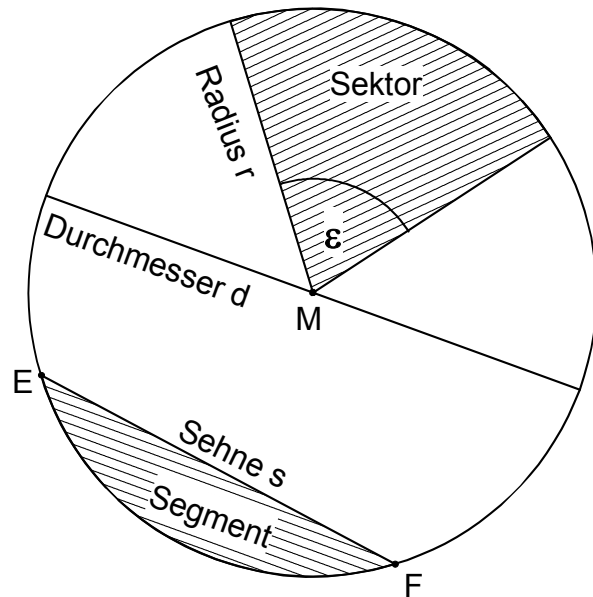
Ü: Gib die fehlenden Winkelmaße an und begründe.



Der Kreis

1 Kreis k

- Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte E und F heißt **Sehne s**.
- Die Sehne s teilt die Kreislinie in zwei **Kreisbögen** \widehat{EF} und \widehat{FE} .
- Das von Kreissehne und Kreisbogen begrenzte Flächenstück ist ein **Kreissegment**.
- Ein von zwei Radien und einem Kreisbogen begrenztes Flächenstück ist ein **Kreis-sektor**.
- Die beiden Radien schließen den **Mittelpunktswinkel** mit dem **Maß ε** ein.



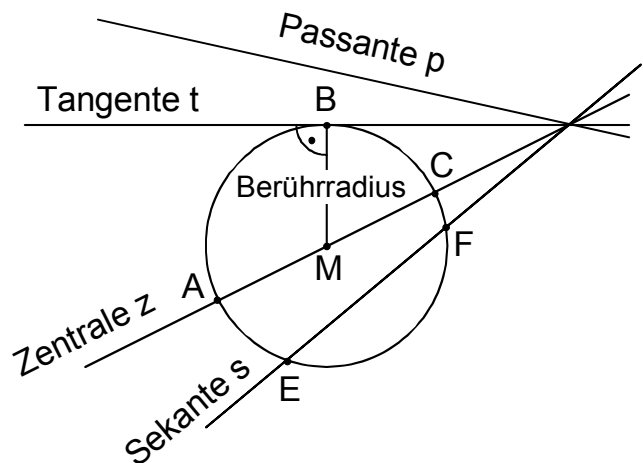
2 Lagebeziehung von Kreis k und Gerade

Passante p : $p \cap k = \emptyset$

Tangente t : $t \cap k = \{B\}$

Zentrale z : $z \cap k = \{A; C\}$ mit $M \in z$

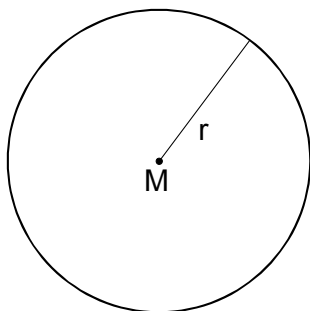
Sekante s : $s \cap k = \{E; F\}$



3 Berechnungen am Kreis

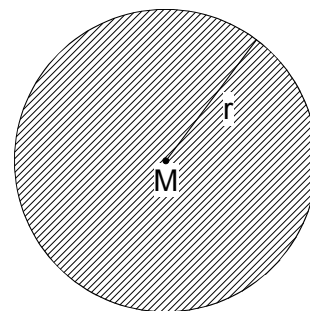
Für den Kreisumfang u gilt:

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi$$



Für den Inhalt der Kreisfläche A gilt:

$$A = r^2 \cdot \pi$$



Für die Kreiszahl π wird vorläufig der Wert $\pi \approx 3,14$ oder $\pi \approx \frac{22}{7}$ benutzt.

Lösungen

- 7/1 1: a) 5^{12} b) $0,5^8$ c) $(-2)^0 = 1$
- 2: a) $3,5^{25}$ b) k^{16} c) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-14}$
- 3: a) 15^2 b) $(x \cdot y \cdot z)^{-3}$ c) 5^7
- 4: a) 7^{-3} b) $(-2,2)^{-6}$ c) 2^3
- 5: a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 49$ b) $(-2)^5$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$
-
- 7/2 a) $\mathbb{L} = \{1, 6\}$ b) $\mathbb{L} = \{x \mid x \geq -101\}$ c) $\mathbb{L} = \{x \mid x \leq -15,5\}$
- d) $\mathbb{L} = \{x \mid x < -1,5\}$ e) $\mathbb{L} = \{-4, 6\}$ f) $\mathbb{L} = \{x \mid x < -\frac{3}{4}\}$
- g) $\mathbb{L} = \{x \mid x \leq -10\}$
-
- 7/4 1.1: $Z_{\text{Jahr1}} = 35,25 \text{ €}$ 1.2: $Z_{\text{Jahr2}} = 36,57 \text{ €}$
- 2: $K_{\text{Jahr5}} = 13700,87 \text{ €}$
-
- 7/7 $\delta_1 = 180^\circ - 112^\circ$ $\delta_1 = 68^\circ$ (Nebenwinkel)
- $\alpha = \delta_1$ $\alpha = 68^\circ$ (Stufenwinkel)
- $\delta_2 = \delta_1$ $\delta_2 = 68^\circ$ (Scheitelwinkel)
- $\delta_3 = 70^\circ$ (Wechselwinkel)
- $\gamma = 180^\circ - 68^\circ - 70^\circ$ $\gamma = 42^\circ$ (Innenwinkelsumme im Dreieck)